Concours d'Entrée

DEUXIEME EPREUVE DE MATHEMATIQUES

OPTION A

Calculatrice non autoriséee.

Durée : 4 heures

Objectif du problème et remarques préliminaires :

- On se propose ici d'examiner, sous certaines conditions, si une équation différentielle linéaire d'ordre 1 ou 2 admet une solution bornée (respectivement admettant une limite finie en $+\infty$).
- Le but de la partie I est d'établir quelques résultats utiles dans la suite du problème.
- Les trois suivantes sont très largement indépendantes.
- L'énoncé inclut un barème indicatif par parties totalisant 100 points répartis sur 31 items.

Notations :

- Dans tout le problème, **N**, **R** et **C** désignent respectivement les ensembles des nombres entiers naturels, réels et complexes. De plus, **K**=**R** ou **K**=**C** et $\mathbf{N}^*=\mathbf{N}\backslash\{0\}$.
- On note classiquement $\Re e$ l'application « partie réelle » définie sur **C**.
- Si $(m,n)\in\mathbf{N}^{*2}$, alors $\mathbf{N}_m=\{k\in\mathbf{N}^*, k\leq m\}$ et $M_{m,n}(\mathbf{C})$ est l'ensemble des matrices à coefficients complexes possédant exactement m lignes et n colonnes.
- Si V est un **K**-espace vectoriel, on désigne par L(V) le **K**-espace vectoriel des

endomorphismes de V, par id_V l'application identité de V. De plus, si $v \in L(V)$, on note Ker(v) le noyau de v. Enfin, si V est normé, $p \in \mathbf{N}$ et I est un intervalle de $\mathbf{R}$, on note $C^p(I,V)$ le $\mathbf{K}$-espace vectoriel des applications de I dans V de classe C^p, $A^0(I,V)$ (respectivement $B^0(I,V)$) l'ensemble constitué des éléments de $C^0(I,V)$ qui admettent une limite en $+\infty$ (respectivement qui sont bornées).

PARTIE I

(sur 20 points)

1/ Prouver que $B^0(\mathbf{R}^+,\mathbf{K})$ est un sous-espace vectoriel de $C^0(\mathbf{R}^+,\mathbf{K})$.

2/ a) Constater qu'il est légitime de considérer l'application π de $C°(\mathbf{R}^+,\mathbf{K})$ dans lui-même qui associe son unique primitive nulle en 0 à tout élément de $C°(\mathbf{R}^+,\mathbf{K})$.

b) Vérifier que π est un endomorphisme de $C°(\mathbf{R}^+,\mathbf{K})$.

3/ Soient $f \in C^0(\mathbf{R}^+,\mathbf{K})$ et $\ell \in \mathbf{K}$ tels que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$.

a) Prouver que f est bornée.

b) Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{[\pi(f)](x)}{x} = \ell$.

(On pourra commencer par envisager le cas où ℓ est nul puis exploiter 2/ b).)

4/ Justifier que $A^0(\mathbf{R}^+,\mathbf{K})$ est un sous-espace vectoriel de $B^0(\mathbf{R}^+,\mathbf{K})$.

5/ Soient $z \in \mathbf{C}$, $P \in \mathbf{C}[X]\backslash\{0\}$ et g l'application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$ définie par :

$$\forall t \in \mathbf{R} \;\; g(t) = e^{z.t}.P(t) .$$

a) Démontrer que g est bornée sur $\mathbf{R}$ si, et seulement si, $\Re e(z)=0$ et P est constant.

b) A quelle condition, nécessaire et suffisante, g est-elle bornée sur $\mathbf{R}^+$ (respectivement admet-elle une limite finie en $+\infty$) ?

PARTIE II

(sur 25 points)

- Dans cette partie, on considère $(a,b)\in(C^0(\mathbf{R}^+,\mathbf{R}))^2$ et l'équation différentielle (E_1) : $y'=a.y+b$ (d'inconnue y, élément de $C^1(\mathbf{R}^+,\mathbf{R})$). Enfin, on désigne par S_1 l'ensemble des solutions (E_1).

6/ a) Prouver que l'unique solution y_0 de (E_1) telle que $y(0)=0$ est l'élément y_0 de $C^1(\mathbf{R}^+,\mathbf{R})$ défini par : $\forall x\in\mathbf{R}^+\ y_0(x) = \int_0^x \left[b(t).e^{[\pi(a)](x)-[\pi(a)](t)} \right] dt$.

b) En déduire, si $\alpha\in\mathbf{R}$, l'unique solution y_α de (E_1) telle que $y_\alpha(0)=\alpha$.

c) Préciser S_1 en fonction y_1-y_0 et y_0.

7/ On suppose, dans cette question, que a et b sont intégrables sur $\mathbf{R}^+$.

a) Justifier que y_1-y_0 et y_0 admettent des limites finies en $+\infty$.

b) En déduire que toutes les solutions de (E_1) appartiennent à $A^0(\mathbf{R}^+,\mathbf{R})$.

c) Prouver que, si $\ell\in\mathbf{R}$, alors (E_1) admet une, et une seule, solution qui tend vers ℓ en $+\infty$.

8/ On suppose maintenant que a et b sont positives.

a) Démontrer que, si toutes les solutions de (E_1) sont bornées, alors a et b sont intégrables.

b) Prouver que les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) a et b sont intégrables sur $\mathbf{R}^+$, (ii) $\forall\ell\in\mathbf{R}\ \exists!y\in S_1\ \lim\limits_{x\to+\infty} y(x) = \ell$,

(iii) $\forall\ell\in\mathbf{R}\ \exists y\in S_1\ \lim\limits_{x\to+\infty} y(x) = \ell$, (iv) $S_1 \subset A^0(\mathbf{R}^+,\mathbf{R})$, (v) $S_1 \subset B^0(\mathbf{R}^+,\mathbf{R})$.

.

PARTIE III

(sur 15 points)

- Dans cette partie, on considère $(p,q)\in(C^0(\mathbf{R}^+,\mathbf{R}))^2$ tel que p soit intégrable sur $\mathbf{R}^+$ et l'équation différentielle (E_2) : $y''=p.y+q$ (d'inconnue y, élément de $C^2(\mathbf{R}^+,\mathbf{R})$). Enfin, on appelle (H_2) l'équation différentielle linéaire homogène associée à (E_2).

9/ Montrer que, si y est une solution bornée de (H_2) , alors : $\lim\limits_{x\to+\infty} y'(x) = 0$.
(On pourra utiliser la question 3/ b).)

10/ Soient u et v deux solutions de (H_2) et $w=u.v'-u'.v$.

a) Prouver que w est constante.

b) En déduire que w est nulle si u et v sont bornées.

11/ En conclure que (H_2) admet une solution non bornée.

12/ (E_2) admet-elle une solution non bornée ?

PARTIE IV

(sur 40 points)

- Dans cette dernière partie, n désigne un élément de $\mathbf{N}^*$, E le $\mathbf{C}$-espace vectoriel $M_{n,1}(\mathbf{C})$ que l'on suppose muni d'une norme, et $A\in M_{n,n}(\mathbf{C})$. On considère l'équation différentielle (L) : $X' = A\times X$ (d'inconnue X, élément de $C^1(\mathbf{R},E)$). On désigne par S_L l'ensemble des solutions de (L). De plus, u est l'endomorphisme de E représenté par A dans la base canonique de E, S le spectre de u et s le cardinal de S. En outre, on suppose que $S=\{\lambda_k,\ k\in\mathbf{N}_s\}$ et que, pour tout élément k de $\mathbf{N}_s$,

m_k est l'ordre de multiplicité de λ_k en tant que valeur propre de u et que :

$$E_k = \mathrm{Ker}(u - \lambda_k.\mathrm{id}_E) \text{ et } F_k = \mathrm{Ker}\left((u - \lambda.\mathrm{id}_E)^{m_k}\right).$$

13/ a) Constater que : $\forall X \in E \;\; u(X) = A \times X$.

b) Justifier le fait que l'application ϕ qui, à tout élément X de S_L, associe X(0) est un isomorphisme de S_L sur E.

14/ On suppose ici que u est diagonalisable et que : $\forall k \in \mathbf{N}_s \; \Re e(\lambda_k)=0$.

a) Si $k \in \mathbf{N}_s$ et $Y \in E_k$, prouver que : $\forall t \in \mathbf{R} \; [\phi^{-1}(Y)](t) = e^{\lambda_k . t}.Y$

b) En déduire que $S_L \subset B^0(\mathbf{R}^+, E)$.

15/ Soit $k \in \mathbf{N}_s$.

a) Constater que $F_k \neq \{0_E\}$ puis qu'il est licite de considérer l'endomorphisme v_k de F_k tel que : $\forall Y \in F_k \; v_k(Y) = u(Y) - \lambda_k.Y$.

b) Justifier l'existence d'un élément ω_k de $\mathbf{N}_{m_k}$ satisfaisant :

$$v_k^{\omega_k - 1} \neq 0_{L(F_k)} \quad \text{et} \quad v_k^{\omega_k} = 0_{L(F_k)} .$$

c) Vérifier que, si $Y \in F_k$, alors :

$$\forall t \in \mathbf{R} \;\; [\phi^{-1}(Y)](t) = e^{\lambda_k . t}.\sum_{p=0}^{\omega_k - 1}\left[\frac{t^p}{p!}.v_k{}^p(Y)\right] .$$

d) En déduire que, si toutes les solutions de (L) sont bornées, alors :

$$\Re e(\lambda_k) = 0 \quad \text{et} \quad \omega_k = 1.$$

On admet désormais que : $E = \overset{s}{\underset{k=1}{\oplus}} F_k$

16/ Déduire des questions précédentes que les assertions suivantes sont équivalentes :

(α) A est diagonalisable et $S \subset \mathbf{R}.i$, (β) $S_L \subset B^0(\mathbf{R}^+, E)$,

(γ) $\forall k \in \mathbf{R}_s$ ($\Re e(\lambda_k)=0$ et $\omega_k=1$) .

17/ A quelle condition, nécessaire et suffisante, les solutions de (L) sont-elles toutes bornées sur $\mathbf{R}^+$ (respectivement admettent-elles toutes une limite en $+\infty$) ?

Fin de l'énoncé